Турнир «Kostroma Open»

Ставший уже традиционным, турнир математических боёв **«Kostroma Open 8-9»** прошел 5-10 ноября 2012 года около города Волгореченска Костромской области. Параллельно с турниром 8-9 классов состоялись соревнования пятиклассников – первый турнир математический игр **«Kostroma Open 5»**.

Председатель жюри и оргкомитета турнира – Дмитрий Александрович Калинин. Организаторы турнира – ЦДОД «Дистантное обучение» города Москвы и ДОЛ «Электроник».

Турнир 8-9 классов собрал 20 команд из Москвы, Костромы, Санкт-Петербурга, Ярославля и Черноголовки (Московская область). Несколько команд были собраны из школьников, занимающихся в летней математической школе «Kostroma Open». В течение турнира прошли командная олимпиада, серия математических боёв, разные интеллектуальные игры, экскурсии. По некоторым задачам боёв были рассказаны небольшие лекции.

В методическую комиссию турнира 8-9 классов вошли Д.А. Калинин, Н.Ю. Медведь, Э.А. Акопян, В.С. Буфеев, А.А. Лопатников, В.В. Трошин, Н.Л. Чернятьев, а также руководители команд (Е.В. Бакаев, И.Е. Преображенский, Е.Я. Обухов). В судействе боёв, кроме вышеперечисленных, участвовали А.П. Вальтман, Л.Н. Головко, О.Е. Данченко, Н.А. Ленская, К.А. Назарова, И.А. Николаева, М.М. Преображенская, Ф.А. Пчелинцев, А.В. Садовников, К.А. Скопцов, А.А. Теслер и Л.А. Трущина. В организации турнира приняли участие Н.А. Зюзина, А.В. Кузнецов, Е.Г. Аксёнова.

На турнир 5 классов приехали команды по 4-6 школьников из Москвы, Санкт-Петербурга и Сарова. Для ребят проходили разные соревнования: разные олимпиады, аукцион, целый турнир экспресс-боёв и другие.

В методическую комиссию турнира 5 классов вошли Д.А. Калинин, Е.А. Асташов, В.В. Ролдугина. В судействе соревнований принимали участие руководители команд О.Е. Знаменская, А.А. Исаева, И.В. Столяров, Е.Н. Шарич.

Отметим главных победителей:

- 9 класс – сборная г. Костромы
- 8 класс – «Интеллектуал», г. Москва
- 5 класс – лицей № 3, г. Саров

План турнира

8-9 класс

- 5 ноября – заезд команд, командная олимпиада, открытие
- 6 ноября – первый тур математических боев
- 7 ноября – второй тур математических боев
- 8 ноября – день экскурсий
- 9 ноября – третий тур математических боев
- 10 ноября – финальный тур, закрытие, отъезд команд

По итогам командной олимпиады было образовано 3 лиги: 9 классов, 8 классов и 8-9 классов. Лига 8 классов и лига 9 классов состояли из 6 команд – в них турнир разыгрывался по так называемой «швейцарской системе». Лига 8-9 классов была разбита на две группы по 4 команды, в которых прошли полные круговые турниры. В последний день прошли стыковые финалы.

5 класс

- 5 ноября – заезд команд, командная олимпиада, открытие
- 6 ноября – тестовая олимпиада, конкурс инженеров, устная олимпиада
- 7 ноября – турнир экспресс-боёв
- 8 ноября – день экскурсий
- 9 ноября – олимпиада по нематематике, аукцион
- 10 ноября – математическая карусель, закрытие, отъезд команд

Турнир пятиклассников состоял из личных и командных соревнований. В экспресс-боях и карусели команды участвовали целиком, в конкурсе инженеров, олимпиаде по нематематике, аукционе – малыми командами по 2-3 человека. Тестовая и устная олимпиады были индивидуальными.

8-9 класс. Командная олимпиада

Условия задач

1. Существует ли такое четырехзначное число, что любое число, образованное одной, двумя или тремя цифрами, идущими подряд, является простым?

2. Замените числа a_1, a_2, …, a_{99} числами 1, 2, 3, …, 99, используя каждое ровно один раз, чтобы сумма

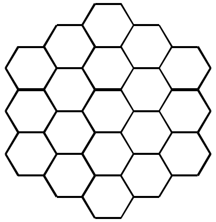
$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_4}{a_5+a_6}+\cdots+\frac{a_{97}}{a_{98}+a_{99}}$$

была целым числом.

3. Попугай, мартышка и слон измеряли длину несчастного удава. Обычный размер оказался равен шагу слона и 23 попугаям. Затем он растянулся (по сравнению с обычным размером) на одно крыло попугая и стал равен двум шагам слона и кувырку мартышки. В третий раз он сжался (по сравнению с обычным размером) на крыло попугая и стал равен четырем кувыркам мартышки и шести попугаям. Чему равна длина удава в попугаях? (Крыло попугая – некая известная часть попугая).

4. Пете дали лист бумаги в форме четырехугольника. Тот смотрит и не нарадуется: есть два способа, как одним отрезком разбить его на два равнобедренных треугольника, и даже способ, как его одним отрезком разбить на три равнобедренных треугольника! Может ли быть так, что Петя не зря радуется?

5. В книге «Анти-Винни-Пух» Сова собирает мёд в соты, а мёд ворует неудачливый осёл Иа-Иа. Пусть Сова распределяет мёд в соты, показанные на рисунке справа, а осёл забирает мёд в произвольных трёх сотах, идущих подряд. Как Сове распределить 1 кг мёда, чтобы Иа-Иа гарантированно досталось как можно больше мёда?



6. Точки K и L – середины оснований AB и CD трапеции $ABCD$. Точки E и F таковы, что $EKFL$ – параллелограмм, стороны которого параллельны боковым сторонам данной трапеции. Докажите, что прямая EF параллельна основаниям трапеции.

7. Существуют ли различные натуральные числа x, y от 670 до 2012 такие, что значения $xy + x$ и $xy + y$ – квадраты целых чисел?

8. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2012. За один ход разрешается выбрать два любых написанных числа и заменить на их сумму и неотрицательную разность. После нескольких ходов все числа на доске оказались равными X. Каковы возможные значения X?

Итоги командной олимпиады

Лига	**Кл**	**Р**	**Команда**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**КРЗ**	**ПР**	**ПН**
Лига 9	9	1	Ярославль-9	1	1	1	1	1	1	1		7	7	7
Лига 9	9	2	СПб-30-9	1	1	1	1	1	1	1		7	8	8
Лига 8	8	3	М-1543-8	1	1	1	1	1	1	1		7	9	9
Лига 9	9	4	Кострома-9	1	1	1		1	1	1		6	6	6
Лига 8	8	5	М-1514-8	1	1	1		1	1	1		6	7	8
Лига 9	9	6	М-25-9	1	1	1		1	1	1		6	7	8
Лига 8	8	7	М-Интеллектуал-8	1	1	1		1	1	1		6	7	10
Лига 8	8	8	М-МММФ-1206-8	1	1	1		1	1	1		6	9	9
Лига 9	9	9	ЛМШ-9-1	1	1	1		1	1			5	5	9
Лига 8	8	10	СПб-ЮМШ-8-1	1	1	1		1		1		5	6	7
Лига 8	8	11	М-2007-8-1	1	1	1		1	1			5	8	11
Лига 9	9	12	ЛМШ-9-3	1	1	1		1	1			5	8	11
Лига 8-9 (1)	8	13	М-2007-8-2	1	1	1			1			4	4	4
Лига 8-9 (2)	9	14	ЛМШ-9-2	1	1	1			1			4	6	13
Лига 8-9 (2)	8	15	СПб-ЮМШ-8-2	1		1		1				3	4	5
Лига 8-9 (1)	8	16	Черноголовка-8	1		1			1			3	4	6
Лига 8-9 (1)	8	17	ЛМШ-8	1		1		1				3	5	5
Лига 8-9 (2)	8	18	М-Квантик-179-8	1		1		1				3	5	8
Лига 8-9 (2)	9	19	М-2007-9	1		1			1			3	7	8
Лига 8-9 (1)	9	20	ЛМШ-8-9	1								1	2	7

КРЗ = количество решенных задач
ПР = число подходов по решенным задачам
ПН = число подходов по всем задачам
Р = рейтинг по итогам командной олимпиады

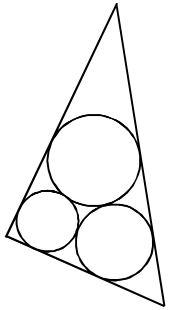
8-9 класс. Первый тур

Лига 9 классов

1. Какое наибольшее число ладей можно выставить на шахматную доску, чтобы каждая ладья была под боем не более чем двух других ладей?

2. В трапеции $ABCD$ выполнено $AD = 2CD = 2BC$. Точки E и F соответственно на основаниях CD и AB таковы, что $DE = 2CE$, $AF = 2BF$. Точка H – пересечение EF с диагональю BD. Докажите, что AH – биссектриса угла A трапеции.

3. Три окружности внутри треугольника расположены так, что каждая касается внешним образом двух других окружностей и двух сторон треугольника (см. рисунок справа). Докажите, что из кусков сторон треугольника, расположенных между точками касания с окружностями, можно сложить треугольник.



4. Дана прямоугольная доска из 2500 клеток. Если её разрезать по всем a горизонтальным линиям и всем b вертикальным линиям сетки, то диагональ разобьется на $(a + b)$ частей. Найдите размеры доски.

5. Числа x и y связаны соотношением $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$. Какое наибольшее значение может принимать y?

6. Пусть условию $3x + 11y = 2012$ удовлетворяют ровно n пар натуральных чисел $(x; y)$. Какое наименьшее натуральное число надо подставить вместо троеточия, чтобы условию $3(x - \ldots) + 11y = 2012$ удовлетворяло более n пар натуральных чисел $(x; y)$?

7. Провели отрезки, являющиеся сторонами клеток доски $n \times n$ и диагоналями клеток, параллельными главной диагонали AB доски. Хомяк прошел от A до B по отрезкам, пройдя по каждому не более одного раза. Проходя по отрезку, он роняет по одному зёрнышку в треугольники, границами которых является этот отрезок. При каких значениях n после окончания его пути в каждом треугольнике может стать ровно по два зёрнышка?

8. В Интернет-тесте для девочек Y-ковый год называется «симпотным», если уравнение $a^2 - 2ab = Y$ имеет решение в целых числах. Сколько «симпотных» годов в XXI веке? (XXI век – это года с 2001 по 2100).

Лига 8 классов

1. Какое наибольшее число ладей можно выставить на шахматную доску, чтобы каждая ладья была под боем не более чем двух других ладей?

2. На листе бумаги нарисована трапеция, боковые стороны которой меньше 1, а длины оснований более 2012, и точка X внутри неё. На боковых сторонах трапеции существуют такие точки Y и Z, что отрезок YZ проходит через точку X и образует равные углы с боковыми сторонами трапеции. Как построить точки Y и Z с помощью циркуля и линейки, если при построениях никакие линии вне трапеции не отображаются?

3. В треугольнике ABC длины сторон равны $AB = 6$, $CA = CB = 5$ (а высота из вершины C равна 4). Точка D внутри треугольника такова, что AD – биссектриса угла A треугольника, $\angle ABD = 45°$; DE – перпендикуляр, опущенный на сторону AC. Найти длину отрезка EC.

4. Дана прямоугольная доска из 2500 клеток. Если её разрезать по всем a горизонтальным линиям и всем b вертикальным линиям сетки, то диагональ разобьется на $(a + b)$ частей. Найдите размеры доски.

5. Кот Матроскин шёл из дома на железнодорожную станцию с постоянной скоростью, планируя прибыть точно к отправлению. Пройдя 1/10 пути, он обнаружил, что забыл выключить свет. Со скоростью, вдвое большей исходной, он вернулся домой и, не меняя скорости, продолжил путь на станцию. Пройдя 1/4 пути, Матроскин осознал, что забыл документы. Тогда он решил бежать втрое быстрее исходного. Кот вернулся за документами и, не меняя скорости, добежал до середины пути. На середине пути уставший Матроскин снова изменил скорость и успел ровно к отправлению поезда. Во сколько раз итоговая скорость Матроскина была больше исходной?

6. Пусть условию $3x + 11y = 2012$ удовлетворяют ровно n пар натуральных чисел $(x; y)$. Какое наименьшее натуральное число надо подставить вместо троеточия, чтобы условию $3(x - \ldots) + 11y = 2012$ удовлетворяло более n пар натуральных чисел $(x; y)$?

7. Провели отрезки, являющиеся сторонами клеток доски $n \times n$ и диагоналями клеток, параллельными главной диагонали AB доски. Хомяк прошел от A до B по отрезкам, пройдя по каждому не более одного раза. Проходя по отрезку, он роняет по одному зёрнышку в треугольники, границами которых является этот отрезок. При каких значениях n после окончания его пути в каждом треугольнике может стать ровно по два зёрнышка?

8. В Интернет-тесте для девочек Y-ковый год называется «симпотным», если уравнение $a^2 - 2ab = Y$ имеет решение в целых числах. Сколько «симпотных» годов в XXI веке? (XXI век – это года с 2001 по 2100).

Лига 8-9 классов

1. Какое наибольшее число ладей можно выставить на шахматную доску, чтобы каждая ладья была под боем не более чем двух других ладей?

2. На листе бумаги нарисована трапеция, боковые стороны которой меньше 1, а длины оснований более 2012, и точка X внутри неё. На боковых сторонах трапеции существуют такие точки Y и Z, что отрезок YZ проходит через точку X и образует равные углы с боковыми сторонами трапеции. Как построить точки Y и Z с помощью циркуля и линейки, если при построениях никакие линии вне трапеции не отображаются?

3. В треугольнике ABC длины сторон равны $AB = 6$, $CA = CB = 5$ (а высота из вершины C равна 4). Точка D внутри треугольника такова, что AD – биссектриса угла A треугольника, $\angle ABD = 45°$; DE – перпендикуляр, опущенный на сторону AC. Найти длину отрезка EC.

4. Дана прямоугольная доска из 2500 клеток. Если её разрезать по всем a горизонтальным линиям и всем b вертикальным линиям сетки, то диагональ разобьется на $(a + b)$ частей. Найдите размеры доски.

5. Кот Матроскин шёл из дома на железнодорожную станцию с постоянной скоростью, планируя прибыть точно к отправлению. Пройдя 1/10 пути, он обнаружил, что забыл выключить свет. Со скоростью, вдвое большей исходной, он вернулся домой и, не меняя скорости, продолжил путь на станцию. Пройдя 1/4 пути, Матроскин осознал, что забыл документы. Тогда он решил бежать втрое быстрее исходного. Кот вернулся за документами и, не меняя скорости, добежал до середины пути. На середине пути уставший Матроскин снова изменил скорость и успел ровно к отправлению поезда. Во сколько раз итоговая скорость Матроскина была больше исходной?

6. Пусть условию $3x + 5y = 2012$ удовлетворяют ровно n пар натуральных чисел $(x; y)$. Какое наименьшее натуральное число надо подставить вместо троеточия, чтобы условию $3(x - \ldots) + 5y = 2012$ удовлетворяло более n пар натуральных чисел $(x; y)$?

7. Провели отрезки, являющиеся сторонами клеток доски 3 × 3 и диагоналями клеток, параллельными главной диагонали AB доски. Хомяк прошел от A до B по отрезкам, пройдя по каждому не более одного раза. Проходя по отрезку, он роняет по одному зёрнышку в треугольники, границами которых является этот отрезок. Может ли после окончания его пути в каждом треугольнике стать ровно по два зёрнышка?

8. В Интернет-тесте для девочек Y-ковый год называется «симпотным», если уравнение $a^2 - 2ab = Y$ имеет решение в целых числах. Сколько «симпотных» годов в XXI веке? (XXI век – это года с 2001 по 2100).

8-9 класс. Второй тур

Лига 9 классов

1. На доске 15 × 15 стоит фишка. Её можно передвигать на соседнюю (по стороне) клетку вверх или на любую соседнюю (по вершине) вниз по диагонали. Нельзя вставать на клетку, на которой фишка уже когда-то стояла. В каком наибольшем числе клеток может побывать фишка?

2. Можно ли из ряда чисел 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, … выбрать несколько чисел, произведение которых оканчивается сочетанием цифр 123?

3. Числа от 1 до 121 записаны змейкой в клетки доски 11 × 11: в первой строке слева направо числа 1, 2, …, 11, во второй строке справа налево числа 12, 13, …, 22, в третьей числа по порядку снова слева направо, и так далее. Отмечены 11 чисел, по одному в каждой строке и каждом столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих чисел?

4. Родители купили ребенку головоломку, состоящую из пяти деревянных фигурок: одного квадрата и четырех равнобедренных треугольников. Среди треугольников нет двух с равными углами, лежащих против основания. Нужно из фигурок сложить треугольник. После неудачных попыток решить головоломку, родители пошли в магазин с претензиями: «Этот набор фигурок не складывается! Да и вообще, наборов такого вида не существует!». Верна ли претензия?

5. Окружность проходит через вершины B и C треугольника и пересекает его стороны AB и AC в точках E и F. Точка пересечения высот треугольника AEF симметрична точке H относительно биссектрисе угла A. Докажите перпендикулярность прямых AH и BC.

6. Известно, что значения выражений $2x^3 + y^2$, $x^2 + 2y$ – рациональные числа. Следует ли из этого, что числа x и y рациональны?

7. В Земноморье ввели драконо-сообщение между городами - авиалинии, где вместо самолётов используются драконы. Известно, что общее число городов не превышает 18, а между любыми тремя городами не более двух драконо-линий. Докажите, что города можно так разбить на 5 групп, что любая драконо-линия соединяет города из разных групп.

8. Сеть дорог Средиземья – линии бесконечной клетчатой плоскости. В какой-то вершине клетки находится Фродо, а в другой вершине какой-то другой клетки – пещера. Из пещеры выбегают орки по 16 штук за одну минуту. Орк видит Фродо только если окажется с ним на одной стороне какой-то клетки. Фродо за минуту преодолевает одну сторону клетки, а орк – две такие стороны. Смогут ли орки поймать Фродо?

Лига 8 классов

1. На доске 7×7 стоит фишка. Её можно передвигать на соседнюю (по стороне) клетку вверх или на любую соседнюю (по вершине) вниз по диагонали. Нельзя вставать на клетку, на которой фишка уже когда-то стояла. В каком наибольшем числе клеток может побывать фишка?
2. Можно ли из ряда чисел 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, … выбрать несколько чисел, произведение которых оканчивается сочетанием цифр 123?
3. Числа от 1 до 121 записаны змейкой в клетки доски 11×11: в первой строке слева направо числа 1, 2, …, 11, во второй строке справа налево числа 12, 13, …, 22, в третьей числа по порядку снова слева направо, и так далее. Отмечены 11 чисел, по одному в каждой строке и каждом столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих чисел?
4. Родители купили ребенку головоломку, состоящую из пяти деревянных фигурок: одного квадрата и четырех равнобедренных треугольников. Среди треугольников нет двух с равными углами, лежащих против основания. Нужно из фигурок сложить треугольник. После неудачных попыток решить головоломку, родители пошли в магазин с претензиями: «Этот набор фигурок не складывается! Да и вообще, наборов такого вида не существует!». Верна ли претензия?
5. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка O – пересечение биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к стороне AB. Точка D на основании AC такова, что $AB = AD$. Точка E на стороне BC такова, что $OB = OE$. Докажите, что угол между AB и DE равен углу DOE.
6. Известно, что значения выражений $29x + 46y$, $12x + 19y$ – целые числа. Следует ли из этого, что $x + 2y$ - целое?
7. В Земноморье ввели драконо-сообщение между городами - авиалинии, где вместо самолётов используются драконы. Известно, что общее число городов не превышает 13, а между любыми тремя городами не более двух драконо-линий. Докажите, что города можно так разбить на 4 группы, что любая драконо-линия соединяет города из разных групп.
8. Сеть дорог Средиземья – линии бесконечной клетчатой плоскости. В какой-то вершине клетки находится Фродо, а в другой вершине какой-то другой клетки – пещера, в которой Фродо был 2012 минут назад. Из пещеры выбегают орки по 16 штук за одну минуту. Орк видит Фродо только если окажется с ним на одной стороне какой-то клетки. Фродо за минуту преодолевает одну сторону клетки, а орк – две такие стороны. Смогут ли орки поймать Фродо?

Лига 8-9 классов

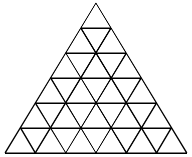
1. На доске 5×5 стоит фишка. Её можно передвигать на соседнюю (по стороне) клетку вверх или на любую соседнюю (по вершине) вниз по диагонали. Нельзя вставать на клетку, на которой фишка уже когда-то стояла. В каком наибольшем числе клеток может побывать фишка?
2. Можно ли из ряда чисел 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, … выбрать несколько чисел, произведение которых оканчивается сочетанием цифр 123?
3. Числа от 1 до 100 записаны змейкой в клетки доски 10×10: в первой строке слева направо числа 1, 2, …, 10, во второй строке справа налево числа 11, 12, …, 20, в третьей числа по порядку снова слева направо, и так далее. Отмечены 10 чисел, по одному в каждой строке и каждом столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих чисел?
4. Родители купили ребенку головоломку, состоящую из пяти деревянных фигурок: одного квадрата и четырех равнобедренных треугольников. Среди треугольников нет двух с равными углами, лежащих против основания. Нужно из фигурок сложить треугольник. После неудачных попыток решить головоломку, родители пошли в магазин с претензиями: «Этот набор фигурок не складывается! Да и вообще, наборов такого вида не существует!». Верна ли претензия?
5. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка O – пересечение биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к стороне AB. Точка D на основании AC такова, что $AB = AD$. Точка E на стороне BC такова, что $OB = OE$. Докажите, что угол между AB и DE равен углу DOE.
6. Известно, что значения выражений $29x + 46y$, $12x + 19y$ – целые числа. Следует ли из этого, что $x + 2y$ – целое?
7. В Земноморье ввели драконо-сообщение между городами – авиалинии, где вместо самолётов используются драконы. Известно, что общее число городов не превышает 9, а между любыми тремя городами не более двух драконо-линий. Докажите, что города можно так разбить на 3 группы, что любая драконо-линия соединяет города из разных групп.
8. Сеть дорог Средиземья – линии бесконечной клетчатой плоскости. В какой-то вершине клетки находится Фродо, а в другой вершине какой-то другой клетки – пещера, в которой Фродо был 2012 минут назад. Из пещеры выбегают орки по 16 штук за одну минуту. Орк видит Фродо только если окажется с ним на одной стороне какой-то клетки. Фродо за минуту преодолевает одну сторону клетки, а орк – две такие стороны. Смогут ли орки поймать Фродо?

8-9 класс. Третий тур

Лига 9 классов

1. Докажите, что если $0 < x, y < 1$, то выполняется неравенство:

$$\frac{x^2+y}{x^4+y^6}+\frac{x+y^5}{x^2+y^4} \geq 2$$



2. На рисунке изображен треугольник со стороной 6, который разбит на треугольники. Лабиринт – это аналогичный треугольник со стороной 2012. В стене между любыми соседними треугольниками есть проход. Выходы из лабиринта расположены в нижних стенках всех треугольников нижнего ряда. Учёный кладёт в каждый треугольник кусочек сыра, а потом сажает мышь в верхний треугольник. Та перебегает из треугольника в треугольник. Её интуиция говорит, что бессмысленно (1) не есть сыр в треугольнике, в который она попала, (2) идти в треугольник, который выше того, в котором она находится, (3) идти в треугольник, где сыр уже съеден. Сколько различных путей, которыми мышь может выбраться из лабиринта?

3. Прошел круговой турнир по волейболу среди n команд. По его итогам команда считает себя «чемпионом», если она победила любую команду в личной встрече или хотя бы «косвенно»: она победила команду, которая выиграла у той. При этом, в «косвенной» победе не учитываются цепочки более чем из двух игр. Какое наибольшее число «чемпионов» могло оказаться? В волейболе не бывает ничьих.

4. Пусть $p_1, \ldots, p_{2012}$ – первые 2012 простых чисел, выписанные в порядке возрастания, P – произведение первых $k - 1$ из них. Докажите, что если $k + p_k > 2013$, то среди чисел $P - 1, 2P - 1, \ldots, p_kP - 1$ найдётся число, которое не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_{2012}$.

5. На прямой отмечены три точки: концы отрезка и точка, делящая этот отрезок в отношении 1 : 2. Поделите этот отрезок пополам с помощью линейки (естественно, без делений).

6. Пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB = CD = EA$, $BC = DE$, угол A – прямой, а остальные углы равны между собой. Стороны квадрата $CDPQ$ пересекают отрезки AB и AE. Докажите, что $BC = AP$.

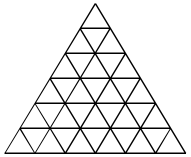
7. При каких n и m прямоугольник $n \times m$ можно разрезать на трехклеточные уголки так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3?

8. Марья Ивановна, подводя итоги четверти в 9 «И» классе заметила странное. Коля посетил 3/4 всех уроков и еще 2/3 от того количества, которое посетила Ксюша. Вася побывал на 1/2 всех уроков и еще на 1/10 количества уроков, на которых присутствовала Ася. Никита был на 3/5 всех уроков и еще 1/7 от количества уроков, на которых присутствовала Оля. Марья Ивановна расположила ребят в порядке возрастания по числу прогулов. Оказалось, что два мальчика пропустили одинаковое число уроков, а больше одинаковых результатов не было. Кто на каком месте оказался в списке у Марьи Ивановны?

Лига 8 классов

1. Докажите, что для чисел $0 < z < y < x < 1$ выполнено:

$$\frac{x}{y+z^2}+\frac{y}{z+x^2} > 1$$



2. На рисунке изображен треугольник со стороной 6, который разбит на треугольники. Лабиринт – это аналогичный треугольник со стороной 2012. В стене между любыми соседними треугольниками есть проход. Выходы из лабиринта расположены в нижних стенках всех треугольников нижнего ряда. Учёный кладёт в каждый треугольник кусочек сыра, а потом сажает мышь в верхний треугольник. Та перебегает из треугольника в треугольник. Её интуиция говорит, что бессмысленно (1) не есть сыр в треугольнике, в который она попала, (2) идти в треугольник, который выше того, в котором она находится, (3) идти в треугольник, где сыр уже съеден. Сколько различных путей, которыми мышь может выбраться из лабиринта?

3. Прошел круговой турнир по волейболу среди n команд. По его итогам команда считает себя «чемпионом», если она победила любую команду в личной встрече или хотя бы «косвенно»: она победила команду, которая выиграла у той. При этом, в «косвенной» победе не учитываются цепочки более чем из двух игр. Какое наибольшее число «чемпионов» могло оказаться? В волейболе не бывает ничьих.

4. Пусть $p_1, \ldots, p_{2012}$ – первые 2012 простых чисел, выписанные в порядке возрастания, P – произведение первых $k - 1$ из них. Докажите, что если $k + p_k > 2013$, то среди чисел $P - 1, 2P - 1, \ldots, p_kP - 1$ найдётся число, которое не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_{2012}$.

5. Точка C лежит на отрезке AB, равносторонние треугольники ACE и BCD расположены по одну сторону от прямой AB. Докажите, что на AB есть такая точка F, что треугольник DEF также равносторонний.

6. Пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB = CD = EA$, $BC = DE$, угол A – прямой, а остальные углы равны между собой. Стороны квадрата $CDPQ$ пересекают отрезки AB и AE. Докажите, что $BC = AP$.

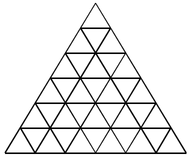
7. При каких n и m прямоугольник $n \times m$ можно разрезать на трехклеточные уголки так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3?

8. Марья Ивановна, подводя итоги четверти в 9 «И» классе заметила странное. Коля посетил 3/4 всех уроков и еще 2/3 от того количества, которое посетила Ксюша. Вася побывал на 1/2 всех уроков и еще на 1/10 количества уроков, на которых присутствовала Ася. Никита был на 3/5 всех уроков и еще 1/7 от количества уроков, на которых присутствовала Оля. Марья Ивановна расположила ребят в порядке возрастания по числу прогулов. Оказалось, что два мальчика пропустили одинаковое число уроков, а больше одинаковых результатов не было. Кто на каком месте оказался в списке у Марьи Ивановны?

Лига 8-9 классов

1. Докажите, что для чисел $0 < z < y < x < 1$ выполнено:
$$\frac{x}{y+z^2}+\frac{y}{z+x^2}>1$$

2. На рисунке изображен треугольник со стороной 6, который разбит на треугольники. Лабиринт – это аналогичный треугольник со стороной 2012. В стене между любыми соседними треугольниками есть проход. Выходы из лабиринта расположены в нижних стенках всех треугольников нижнего ряда. Учёный кладёт в каждый треугольник кусочек сыра, а потом сажает мышь в верхний треугольник. Та перебегает из треугольника в треугольник. Её интуиция говорит, что бессмысленно (1) не есть сыр в треугольнике, в который она попала, (2) идти в треугольник, который выше того, в котором она находится, (3) идти в треугольник, где сыр уже съеден. Сколько различных путей, которыми мышь может выбраться из лабиринта?



3. Прошел круговой турнир по волейболу среди n команд. По его итогам команда считает себя «чемпионом», если она победила любую команду в личной встрече или хотя бы «косвенно»: она победила команду, которая выиграла у той. При этом, в «косвенной» победе не учитываются цепочки более чем из двух игр. Верно ли, что всегда найдётся команда, ставшая «чемпионом»? В волейболе не бывает ничьих.

4. Решить уравнение $n! = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

5. Точка C лежит на отрезке AB, равносторонние треугольники ACE и BCD расположены по одну сторону от прямой AB. Докажите, что на AB есть такая точка F, что треугольник DEF также равносторонний.

6. Пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB = CD = EA$, $BC = DE$, угол A – прямой, а остальные углы равны между собой. Стороны квадрата $CDPQ$ пересекают отрезки AB и AE. Докажите, что $BC = AP$.

7. При каких n и m прямоугольник $n \times m$ можно разрезать на трехклеточные уголки так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3?

8. Марья Ивановна, подводя итоги четверти в 9 «И» классе заметила странное. Коля посетил 3/4 всех уроков и еще 2/3 от того количества, которое посетила Ксюша. Вася побывал на 1/2 всех уроков и еще на 1/10 количества уроков, на которых присутствовала Ася. Никита был на 3/5 всех уроков и еще 1/7 от количества уроков, на которых присутствовала Оля. Марья Ивановна расположила ребят в порядке возрастания по числу прогулов. Оказалось, что два мальчика пропустили одинаковое число уроков, а больше одинаковых результатов не было. Кто на каком месте оказался в списке у Марьи Ивановны?

8-9 класс. Финальный тур

9 класс (А)

1. Набор состоит из клеточных деталек. Из него можно составить любую клеточную фигурку площади 100 (при этом лишних деталек не остаётся). Каково наименьшее возможное количество деталек в таком наборе?

2. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC и точку O - центр его описанной окружности, пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно. На этой же окружности (в другой полуплоскости относительно BC) отмечены точки E_1 и F_1, диаметрально противоположные точкам E и F, и такая точка G, что треугольники EOF и F_1GE_1 равны. Докажите, что точки A, O и G лежат на одной прямой.

3. При каких положительных значениях x выражение
$$x^2-3x+\frac{4}{x}+12$$
принимает наименьшее значение?

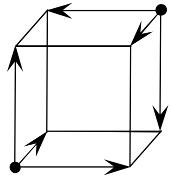
4. Найдите все такие простые p, что число $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ является квадратом целого числа.

5. Дано кольцо из 2012 клеток. В некоторой клетке стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку. За один ход можно перепрыгнуть на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток по часовой стрелке или на одну клетку против часовой стрелки. Нельзя ставить фишку в те клетки, где фишка побывала ранее. Кто из игроков не сможет сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

6. Два подобных треугольника ABC и CDE расположены так, что точка C лежит на отрезке AE, а вершины B и D лежат в одной полуплоскости относительно AE. Пусть H – пересечение высоты треугольника CDE, опущенной из вершины E, и перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую DE. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника AHE равен сумме радиусов описанных окружностей треугольников ABC и CDE.

7. В ювелирном магазине на витрине лежат 5 золотых и 13 серебряных колец. Все массы колец различны. Продавец знает, что хозяин выложил золотые кольца в порядке возрастания массы, а серебряные кольца – в порядке убывания массы. Но никаких бирок с массами не осталось. Покупатель попросил показать все кольца в порядке возрастания массы. В распоряжении продавца есть только маленькие весы, на которых можно сравнить массы только двух колец. Как за 16 взвешиваний продавец может выложить все кольца в нужном порядке?

8. Планета Куба имеет форму куба $10 \times 10 \times 10$. На его ребрах расставлены стрелки так, как указано на рисунке (клетки на рисунке не изображены). Космодесантник собирается высадиться на эту планету. Он может переходить из клетки в клетку поверхности куба согласно указаниям любой из стрелок на грани, на которой он находится. При этом он не посещает одну и ту же клетку дважды. Он хочет высадиться в одну из клеток на поверхности и пробежать как можно большее расстояние. Какое максимальное расстояние он сможет пройти?



9 класс (Б)

1. Набор состоит из клеточных деталек. Из него можно составить любую клеточную фигурку площади 100 (при этом лишних деталек не остаётся). Каково наименьшее возможное количество деталек в таком наборе?

2. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC и точку O - центр его описанной окружности, пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно. На этой же окружности (в другой полуплоскости относительно BC) отмечены точки E_1 и F_1, диаметрально противоположные точкам E и F, и такая точка G, что треугольники EOF и F_1GE_1 равны. Докажите, что точки A, O и G лежат на одной прямой.

3. При каких положительных значениях x выражение
$$x^2 - 3x + \frac{4}{x} + 12$$
принимает наименьшее значение?

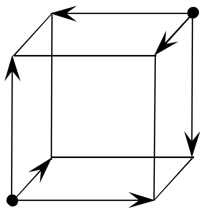
4. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие соотношению $x^3 + y = y^{11}$.

5. Дано кольцо из 2012 клеток. В некоторой клетке стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку. За один ход можно перепрыгнуть на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток по часовой стрелке или на одну клетку против часовой стрелки. Нельзя ставить фишку в те клетки, где фишка побывала ранее. Кто из игроков не сможет сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

6. Два подобных треугольника ABC и CDE расположены так, что точка C лежит на отрезке AE, а вершины B и D лежат в одной полуплоскости относительно AE. Пусть H – пересечение высоты треугольника CDE, опущенной из вершины E, и перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую DE. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника AHE равен сумме радиусов описанных окружностей треугольников ABC и CDE.

7. В ювелирном магазине на витрине лежат 2 золотых и 5 серебряных кольца. Все массы колец различны. Продавец знает, что хозяин выложил золотые кольца в порядке возрастания массы, а серебряные кольца – в порядке убывания массы. Но никаких бирок с массами не осталось. Покупатель попросил показать все кольца в порядке возрастания массы. В распоряжении продавца есть только маленькие весы, на которых можно сравнить массы только двух колец. Как за 5 взвешиваний продавец может выложить все кольца в нужном порядке?

8. Планета Куба имеет форму куба $10 \times 10 \times 10$. На его ребрах расставлены стрелки так, как указано на рисунке (клетки на рисунке не изображены). Космодесантник собирается высадиться на эту планету. Он может переходить из клетки в клетку поверхности куба согласно указаниям любой из стрелок на грани, на которой он находится. При этом он не посещает одну и ту же клетку дважды. Он хочет высадиться в одну из клеток на поверхности и пробежать как можно большее расстояние. Какое максимальное расстояние он сможет пройти?

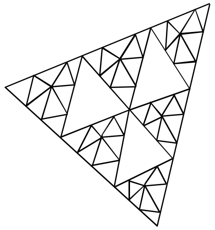


8 класс (А)

1. Набор состоит из клеточных деталек. Из него можно составить любую клеточную фигурку площади 100 (при этом лишних деталек не остаётся). Каково наименьшее возможное количество деталек в таком наборе?

2. Точка X внутри параллелограмма $ABCD$ такова, что углы CXD и AXB – прямые. Докажите, что прямая, проходящая через точку X перпендикулярно стороне BC, проходит через центр параллелограмма.

3. Треугольное стекло разбилось на 57 треугольных кусочков, как показано на рисунке. Если Жене, разбившему стекло, указать на любой осколок, то он назовёт периметр этого кусочка. Как узнать периметр первоначального куска стекла?



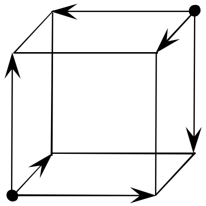
4. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие соотношению $x^3 + y = y^{11}$.

5. Дана полоска из 2012 клеток. В первой клетке стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку. За один ход можно перепрыгнуть вперед на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток или на одну клетку назад. Нельзя ставить фишку в те клетки, где фишка побывала ранее. Кто из игроков не сможет сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

6. Отрезок CL равен катету равнобедренного прямоугольного треугольника ABC и пересекает его гипотенузу. Прямые, симметричные AB относительно AL и BL, пересекаются в точке M. Докажите, что точка M лежит на прямой CL.

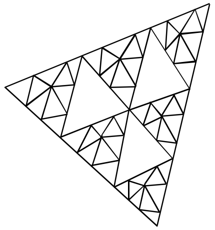
7. В ювелирном магазине на витрине лежат 5 золотых и 13 серебряных колец. Все массы колец различны. Продавец знает, что хозяин выложил золотые кольца в порядке возрастания массы, а серебряные кольца – в порядке убывания массы. Но никаких бирок с массами не осталось. Покупатель попросил показать все кольца в порядке возрастания массы. В распоряжении продавца есть только маленькие весы, на которых можно сравнить массы только двух колец. Как за 16 взвешиваний продавец может выложить все кольца в нужном порядке?

8. Планета Куба имеет форму куба $10 \times 10 \times 10$. На его ребрах расставлены стрелки так, как указано на рисунке (клетки на рисунке не изображены). Космодесантник собирается высадиться на эту планету. Он может переходить из клетки в клетку поверхности куба согласно указаниям любой из стрелок на грани, на которой он находится. При этом он не посещает одну и ту же клетку дважды. Он хочет высадиться в одну из клеток на поверхности и пробежать как можно большее расстояние. Какое максимальное расстояние он сможет пройти?

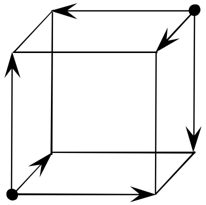


8 класс (Б) + 8-9 класс (А)

1. Набор состоит из клеточных деталек. Из него можно составить любую клеточную фигурку площади 100 (при этом лишних деталек не остаётся). Каково наименьшее возможное количество деталек в таком наборе?
2. Точка X внутри параллелограмма $ABCD$ такова, что углы CXD и AXB – прямые. Докажите, что прямая, проходящая через точку X перпендикулярно стороне BC, проходит через центр параллелограмма.
3. Треугольное стекло разбилось на 57 треугольных кусочков, как показано на рисунке. Если Жене, разбившему стекло, указать на любой осколок, то он назовёт периметр этого кусочка. Как узнать периметр первоначального куска стекла?



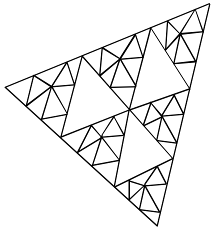
4. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие соотношению $x^3 + y = y^{11}$.
5. Дана полоска из 2012 клеток. В первой клетке стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку. За один ход можно перепрыгнуть вперед на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток или на одну клетку назад. Нельзя ставить фишку в те клетки, где фишка побывала ранее. Кто из игроков не сможет сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?
6. Отрезок CL равен катету равнобедренного прямоугольного треугольника ABC и пересекает его гипотенузу. Прямые, симметричные AB относительно AL и BL, пересекаются в точке M. Докажите, что точка M лежит на прямой CL.
7. В ювелирном магазине на витрине лежат 2 золотых и 5 серебряных колец. Все массы колец различны. Продавец знает, что хозяин выложил золотые кольца в порядке возрастания массы, а серебряные кольца – в порядке убывания массы. Но никаких бирок с массами не осталось. Покупатель попросил показать все кольца в порядке возрастания массы. В распоряжении продавца есть только маленькие весы, на которых можно сравнить массы только двух колец. Как за 5 взвешиваний продавец может выложить все кольца в нужном порядке?
8. Планета Куба имеет форму куба $10 \times 10 \times 10$. На его ребрах расставлены стрелки так, как указано на рисунке (клетки на рисунке не изображены). Космодесантник собирается высадиться на эту планету. Он может переходить из клетки в клетку поверхности куба согласно указаниям любой из стрелок на грани, на которой он находится. При этом он не посещает одну и ту же клетку дважды. Он хочет высадиться в одну из клеток на поверхности и пробежать как можно большее расстояние. Какое максимальное расстояние он сможет пройти?



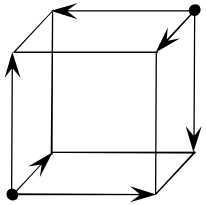
8-9 класс (Б)

1. Набор состоит из клеточных деталек. Из него можно составить любую клеточную фигурку площади 40 (при этом лишних деталек не остаётся). Верно ли, что в нём может быть менее 30 деталей?

2. Точка X внутри параллелограмма $ABCD$ такова, что углы CXD и AXB – прямые. Докажите, что прямая, проходящая через точку X перпендикулярно стороне BC, проходит через центр параллелограмма.
3. Треугольное стекло разбилось на 57 треугольных кусочков, как показано на рисунке. Если Жене, разбившему стекло, указать на любой осколок, то он назовёт периметр этого кусочка. Как узнать периметр первоначального куска стекла?



4. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие соотношению $x^3 + y = y^{11}$.
5. Дана полоска из 2012 клеток. В первой клетке стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку. За один ход можно перепрыгнуть вперед на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток или на одну клетку назад. Нельзя ставить фишку в те клетки, где фишка побывала ранее. Кто из игроков не сможет сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?
6. Отрезок CL равен катету равнобедренного прямоугольного треугольника ABC и пересекает его гипотенузу. Прямые, симметричные AB относительно AL и BL, пересекаются в точке M. Докажите, что точка M лежит на прямой CL.
7. В ювелирном магазине на витрине лежат 2 золотых и 5 серебряных колец. Все массы колец различны. Продавец знает, что хозяин выложил золотые кольца в порядке возрастания массы, а серебряные кольца – в порядке убывания массы. Но никаких бирок с массами не осталось. Покупатель попросил показать все кольца в порядке возрастания массы. В распоряжении продавца есть только маленькие весы, на которых можно сравнить массы только двух колец. Как за 5 взвешиваний продавец может выложить все кольца в нужном порядке?
8. Планета Куба имеет форму куба $10 \times 10 \times 10$. На его ребрах расставлены стрелки так, как указано на рисунке (клетки на рисунке не изображены). Космодесантник собирается высадиться на эту планету. Он может переходить из клетки в клетку поверхности куба согласно указаниям любой из стрелок на грани, на которой он находится. При этом он не посещает одну и ту же клетку дважды. Он хочет высадиться в одну из клеток на поверхности и пробежать как можно большее расстояние. Какое максимальное расстояние он сможет пройти?



8-9 класс. Результаты турнира

Лига 9 классов

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Итог**	**Место**
Ярославль-9	х	0		2		2	4	3
СПб-30-9	2	х	0		2		4	2
Кострома-9		2	х	2	2		6	1
М-25-9	0		0	х		2	2	4
ЛМШ-9-1		0	0		х	2	2	5
ЛМШ-9-3	0			0	0	х	0	6

ЛМШ-9-3	20:43	**Ярославль-9**
ЛМШ-9-1	21:45	**СПб-30-9**
Кострома-9	66:21	М-25-9
Ярославль-9	24:66	**СПб-30-9**
Кострома-9	64:22	ЛМШ-9-1
ЛМШ-9-3	12:54	**М-25-9**
М-25-9	16:66	**Ярославль-9**
СПб-30-9	35:49	**Кострома-9**
ЛМШ-9-3	12:33	**ЛМШ-9-1**
Ярославль-9	08:50	**Кострома-9**
СПб-30-9	46:00	ЛМШ-9-3
ЛМШ-9-1	16:48	**М-25-9**

Лига 8 классов

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Итог**	**Место**
М-1543-8	х	2		2	2	0	4	3
М-1514-8	0	х	0	2	2		4	4
М-Интеллектуал-8		2	х	2		2	6	1
М-МММФ-1206-8	0	0	0	х	2	0	2	5
СПб-ЮМШ-8-1	0	0		0	х	0	0	6
М-2007-8-1	2		0	2	2	х	6	2

М-Интеллектуал-8	61:23	М-МММФ-1206-8
СПб-ЮМШ-8-1	21:39	**М-1514-8**
М-1543-8	41:47	**М-2007-8-1**
М-1543-8	64:26	СПб-ЮМШ-8-1
М-1514-8	26:52	**М-Интеллектуал-8**
М-МММФ-1206-8	30:43	**М-2007-8-1**
М-1543-8	50:34	М-1514-8
М-Интеллектуал-8	67:29	М-2007-8-1
СПб-ЮМШ-8-1	19:39	**М-МММФ-1206-8**
М-1543-8	19:33	**М-Интеллектуал-8**
М-2007-8-1	46:10	СПб-ЮМШ-8-1
М-1514-8	45:36	М-МММФ-1206-8

Лига 8-9 классов

Группа 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**Сумма**	**Итог**
М-2007-8-2	x	2	0	2	4	II
Черноголовка-8	0	x	0	2	2	III
ЛМШ-8	2	2	x	1	5	I
ЛМШ-8-9	0	0	1	x	1	IV

М-2007-8-2	45:05	ЛМШ-8-9
Черноголовка-8	08:34	**ЛМШ-8**
М-2007-8-2	31:28	Черноголовка-8
ЛМШ-8-9	33:33	ЛМШ-8
М-2007-8-2	03:55	**ЛМШ-8**
ЛМШ-8-9	14:40	**Черноголовка-8**

8-9 класс (2)	1	2	3	4	Сумма	Итог
ЛМШ-9-2	x	2	0	0	2	III
СПб-ЮМШ-8-2	0	x	0	0	0	IV
М-Квантик-179-8	2	2	x	2	6	I
М-2007-9	2	2	0	x	4	II

М-2007-9	23:19	ЛМШ-9-2
М-Квантик-179-8	30:08	СПб-ЮМШ-8-2
М-2007-9	20:11	СПб-ЮМШ-8-2
ЛМШ-9-2	30:38	**М-Квантик-179-8**
М-2007-9	26:49	**М-Квантик-179-8**
СПб-ЮМШ-8-2	08:40	**ЛМШ-9-2**

Финальные бои

М-Квантик-179-8	33:06	ЛМШ-8
М-2007-8-2	19:26	**М-2007-9**
ЛМШ-9-2	32:28	Черноголовка-8
ЛМШ-8-9	16:26	**СПб-ЮМШ-8-2**

Победители турнира

I место	М-Квантик-179-8
II место	ЛМШ-8
II место	М-2007-9
III место	М-2007-8-2